Mécanique analytique, Série 9

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Dans cette série d'exercices, vous allez appliquer les notions de structure canonique et de fonction génératrice, vues dans le dernier cours.

Exercice 1 : Transformation canonique

Montrer que la transformation

$$P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right), \qquad Q = \arctan\left(\frac{q}{p}\right) \tag{1}$$

est canonique.

Exercice 2 : Utiliser les transformations canoniques

Étudier la dynamique du système décrit par le hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m}\left(\frac{l}{q}\right)^2 - \lambda q^2. \tag{2}$$

a) Écrire les équations de Hamilton dans ces coordonnées.
b) Définir une nouvelle impulsion $P(p, q, t)$ de sorte à ce que le nouveau terme cinétique soit canonique, c'est-à-dire de type $P^2/(2m)$.
c) Trouver une fonction $F_2(q, P, t)$ qui engendre cette transformation.
d) En déduire la nouvelle coordonnée généralisée $Q(p, q, t)$ ainsi que le nouvel hamiltonien $K(P, Q, t)$.
e) Résoudre les équations de Hamilton avec ces nouvelles coordonnées.
f) Inverser la transformation pour trouver la solution $p(t)$, $q(t)$. Vérifier ces solutions.

Exercice 3 : Parachutiste et hélicoptère

Un parachutiste en chute libre (donc sans parachute) est filmé depuis un hélicoptère. Celui-ci suit une trajectoire définie $h(t)$ (on ne considère que la dimension verticale).

a) Écrire le hamiltonien décrivant le parachutiste vu depuis un référentiel fixe (terre).
b) Définir les nouvelles coordonnées $P(p, q, t)$ et $Q(p, q, t)$ qui décrivent le mouvement tel que vu depuis l'hélicoptère.

c) Essayer de deviner les équations du mouvement pour ces nouvelles coordonnées ($\dot{Q}$ et $\dot{P}$ en fonction de h).

d) Trouver une fonction de type $F_2(P, q, t)$ qui engendre cette transformation. Est-ce que cette transformation est canonique ?

e) Écrire le hamiltonien ainsi que les équations de Hamilton pour ces nouvelles coordonnées.